INSTITUT NATIONAL DES TELECOMMUNICATIONS 1984

MATHEMATIQUES (Option M)

Notations et définitions

On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des nombres entiers naturels, et $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

On note E l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des applications continues de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$, $\mathcal{P}$ le sous-espace vectoriel de E formé des fonctions polynômes, et $\mathcal{P}_n$ la partie de $\mathcal{P}$ formée des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à n. On pourra utiliser l'expression "polynôme" à la place de "fonction polynôme".

Définition 1 : étant donné une norme N sur E, et f, g, deux éléments de E, on dit que g est une approximation de f à ε près relativement à la norme N si et seulement si :

$$N(f - g) \leqslant \varepsilon \qquad (1)$$

Définition 2 : étant donné un entier naturel n et un élément f de E, on dit que le polynôme P, appartenant à $\mathcal{P}_n$, est une meilleure approximation de degré n de f relativement à la norme N, si et seulement si il vérifie la condition :

$$N(f - P) = \operatorname{Inf}_{Q \in \mathcal{P}_n} N(f - Q) \qquad (2)$$

(Inf : borne inférieure)

PARTIE I

1°) Vérifier que la relation :

$$\forall f \in E,\ N_\infty(f) = \sup_{x \in [-1,1]} |f(x)| \qquad (3)$$

définit une norme sur E.

2°) Soit f un élément de E et R un polynôme constant. On désigne respectivement par m et M le minimum et le maximum de f sur $[-1, 1]$.

Calculer $N_\infty(f - R)$. En déduire l'existence et l'unicité d'un polynôme R_o de meilleure approximation de degré zéro de la fonction f relativement à la norme N_∞.

Expliciter R_o pour la fonction f_o définie par :

$$\forall x \in [-1, 1],\ f_o(x) = \sin x \qquad (4)$$

3°) Soit f un élément de E et n un entier naturel non nul. Montrer qu'il existe une suite $\{P_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{P}_n$, convergeant vers un élément P de $\mathcal{P}_n$, pour la norme N_∞, telle que :

$$N_\infty(f - P_k) \xrightarrow[k \to +\infty]{} \operatorname{Inf}_{Q \in \mathcal{P}_n} N_\infty(f - Q) \qquad (5)$$

.../...

En déduire l'existence d'un polynôme de meilleure approximation de degré n de la fonction f relativement à la norme N_∞.

4°) Soit f une fonction indéfiniment dérivable sur [-1, 1], telle qu'il existe un réel M positif ou nul vérifiant :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in [-1, 1],\ |f^{(n)}(x)| \leqslant M \qquad (6)$$

On définit, pour tout entier naturel n, le polynôme S_n^f par :

$$\forall\, x \in [-1, 1],\ S_n^f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k \qquad (7)$$

Montrer que la suite $\left\{ N_\infty (f - S_n^f) \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers zéro. En déduire que pour tout réel ε strictement positif, f admet une approximation à ε près par une fonction polynôme relativement à la norme N_∞.

5°) On considère de nouveau la fonction f_o définie par :

$$\forall\, x \in [-1, 1],\ f_o(x) = \sin x \qquad (8)$$

Calculer $N_\infty (f_o - S_n^{f_o})$, pour n = 0, 1, 2, 3, 4.

Calculer $N_\infty (f_o - k)$ où k est la fonction définie par :

$$\forall\, x \in [-1,1]\quad k(x) = (\sin 1).x.$$

Montrer que, en général, $S_n^{f_o}$ n'est pas le polynôme de meilleure approximation de degré n de la fonction f_o relativement à la norme N_∞.

PARTIE II

1°) a) Montrer que l'application φ définie par :

$$\forall (f,g) \in E^2 \xrightarrow{\ \varphi\ } \varphi(f,g) = \int_{-1}^{+1} \frac{f(t)\, g(t)}{\sqrt{1 - t^2}}\, dt \in \mathbb{R} \qquad (9)$$

est un produit scalaire sur E.

b) En déduire que l'application N_2 définie par :

$$\forall\, f \in E \xrightarrow{\ N_2\ } N_2(f) = \sqrt{\varphi(f,f)} \in \mathbb{R}_+ \qquad (10)$$

est une norme sur E.

c) La norme N_2 est-elle équivalente à la norme N_∞ définie dans la partie I ?

Indication : on pourra utiliser éventuellement la suite de fonctions $\left\{ g_n \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\quad \forall\, x \in [-1, 1],\ g_n(x) = x^n \qquad (11)$$

.../...

2°) Montrer que si g est une approximation de f à ε près relativement à la norme N_∞, c'est aussi une approximation de f à ε' près relativement à la norme N_2, où ε' est un réel que l'on exprimera en fonction de ε seulement.

Donner alors un résultat analogue à celui de la question I) 4°).

3°) a) Montrer que pour tout entier naturel n, il existe un et un seul polynôme T_n tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad T_n(\cos x) = \cos nx \tag{12}$$

b) Expliciter T_0, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5.

c) Montrer que pour tout entier naturel n, le polynôme T_n est de degré n.

d) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in [-1, 1], \quad |T_n(x)| \leqslant 1 \tag{13}$$

4°) Calculer le produit scalaire $\varphi(T_k, T_\ell)$, k et ℓ désignant deux entiers naturels. En déduire, pour tout entier naturel n, une base orthonormée $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ de $\mathcal{P}_n$ composée de polynômes de degrés respectifs 0, 1, ..., n.

5°) Soit N un entier naturel, et P un polynôme de degré inférieur ou égal à N. P s'écrit donc de façon unique sous la forme :

$$\forall x \in [-1, 1], \quad P(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k T_k(x) \tag{14}$$

Montrer que, pour tout entier n tel que $0 \leqslant n \leqslant N$, il existe un et un seul polynôme de meilleure approximation de degré n de P relativement à la norme N_2, ce polynôme W_n étant défini par :

$$\forall x \in [-1, 1], \quad W_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k T_k(x) \tag{15}$$

6°) On considère de nouveau la fonction f_o définie par :

$$\forall x \in [-1, 1], \quad f_o(x) = \sin x \tag{16}$$

a) Donner l'expression de $S_5^{f_o}(x)$, $S_n^{f_o}$ étant le polynôme défini dans la question I - 4°) par la formule (7).

b) Déterminer le polynôme W de meilleure approximation de degré 4 de $S_5^{f_o}$ relativement à la norme N_2.

c) Montrer que ce polynôme W donne une meilleure approximation de f_o que $S_4^{f_o}$, relativement à la norme N_∞, c'est-à-dire :

$$N_\infty (f_o - W) < N_\infty (f_o - S_4^{f_o}).$$

On pourra utiliser la propriété (13) établie dans la question II -3°)d).